



Problema AND26.1

a) Empezamos por calcular el determinante D_n

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}_n =$$

Desarrollo por elementos de la fila 1 (desarrollo de Laplace)

$$D_n = x \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}_{n-1} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

D_{n-1}

$$D_n = x \cdot D_{n-1} - 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}_{n-2} = x D_{n-1} - D_{n-2}$$

D_{n-2}

$D_n = x D_{n-1} - D_{n-2}$

Relación de recurrencia lineal homogénea de orden 2.

Si ahora nos centramos en P_n :

$$\begin{aligned}
 P_n &= \begin{vmatrix} D_n & D_{n-1} \\ D_{n+1} & D_n \end{vmatrix}_{2 \times 2} = D_n^2 - D_{n-1} \cdot D_{n+1} = \\
 &= D_n \cdot \underbrace{(\times D_{n-1} - D_{n-2})}_{D_n} - D_{n-1} \cdot \underbrace{(\times D_n - D_{n-1})}_{D_{n+1}} \\
 &= \cancel{\times D_n D_{n-1}} - D_n D_{n-2} - \cancel{\times D_n D_{n-1}} + D_{n-1}^2 \\
 &= D_{n-1}^2 - D_{n-2} D_n = P_{n-1} = \begin{vmatrix} D_{n-1} & D_{n-2} \\ D_n & D_{n-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando la relación de recurrencia

Es decir, hemos obtenido que:

$$P_n = P_{n-1} \Rightarrow \text{relación de recurrencia lineal de orden 1}$$

$$P_n = \text{cte}$$

Notese que $P_1 = \begin{vmatrix} D_1 & D_0 \\ D_2 & D_1 \end{vmatrix}$ no está definido al no estar definido D_0 .

$$\text{El primer elemento será } P_2 = \begin{vmatrix} D_2 & D_1 \\ D_3 & D_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= |x| = x \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 2x
 \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos la condición inicial de P_n :

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \begin{vmatrix} x^2-1 & x \\ x^3-2x & x^2-1 \end{vmatrix} = (x^2-1)^2 - x(x^3-2x) \\
 &= x^4 + 1 - 2x^2 - x^4 + 2x^2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Por ello: } P_n = 1 \quad \forall n \geq 2$$



b) Al ser D_n una sucesión recurrente lineal homogénea de orden 2, podemos hallar su término general; a través de su polinomio característico:

$$x=2$$



$$D_n = x D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n - 2 D_{n-1} + D_{n-2} = 0$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1 \text{ (doble)}$$

Al ser una raíz doble tendríamos que:

$$D_n = a \cdot 1^n + b \cdot 1^n$$

lo cual no tiene sentido por las 2 soluciones dependientes.

Para evitar esa dependencia lineal de las soluciones fundamentales tomamos

$$D_n = a \cdot 1^n + b \cdot n \cdot 1^n$$

Aplicando condiciones iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = 2 \\ D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} D_1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 \cdot 1 = 2 \\ D_2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 2 \cdot 1^2 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \hookrightarrow \begin{array}{l} a+b=2 \\ a+2b=3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a+b=2 \\ -a-2b=-3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array} \end{array}$$

En definitiva:

$$D_n = 1 + n$$

La
equi
 $a^2 =$

la altura de
es:
 $a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\hookrightarrow h_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$a^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow h_2 = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$$

$$A(-b/2, 0) \quad B(b/2, 0) \quad C(0, \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2})$$
$$\vec{OM} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} \rightarrow M\left(\frac{b}{4}, \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}\right)$$
$$t \equiv \left\{ \begin{array}{l} \vec{d} = \left(\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}, \frac{b}{2} \right) \\ M \left(\frac{b}{4}, \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \right) \end{array} \right. \quad t \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{b}{4} + \lambda \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} + \lambda \cdot \frac{b}{2} \end{array} \right.$$



Un punto genérico de dicha recta es:

$$P \left(\frac{b}{4} + \lambda \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}, \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} + \lambda \frac{b}{2} \right)$$

Exigimos que dicho punto diste $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ de M ya que $\overline{MD} = h_s = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ para obtener el vértice D

$$|\overrightarrow{MP}| = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$\left(\lambda \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\lambda b}{2} \right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 \cdot (4a^2 - b^2) + \lambda^2 b^2 = 3a^2$$
$$\lambda^2 = \frac{3}{4} \rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nos vale la solución positiva

Por tanto, el vértice D será:

$$D \left(\frac{b}{4} + \frac{\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{4}, \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} + \frac{\sqrt{3}b}{4} \right)$$

Finalmente, para obtener el centro del triángulo equilátero podemos:

OPCIÓN 1 Al ser un triángulo equilátero, todos los centros coinciden. Así, podemos calcular X como el baricentro o centroide del triángulo $\triangle BCD$.

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}$$

OPCIÓN 2 Propiedad del baricentro.

Divide cada mediana en proporción 2:1, es decir, $\frac{2}{3}$ partes hasta el vértice y $\frac{1}{3}$ hasta el lado

$$\overrightarrow{MX} = \frac{\overrightarrow{MD}}{3}$$

$$\vec{OX} = \left(\frac{3b + \sqrt{12a^2 - 3b^2}}{12}, \frac{3\sqrt{4a^2 - b^2} + \sqrt{3}b}{12} \right)$$
$$r = |\vec{OX}| \Rightarrow r^2 = \left(\frac{b}{4} + \frac{\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{12} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} + \frac{\sqrt{3}b}{12} \right)^2$$

$$= \frac{b^2}{16} + \frac{12a^2 - 3b^2}{144} + \frac{b\sqrt{3} \cdot \sqrt{4a^2 - b^2}}{24} + \frac{4a^2 - b^2}{16} + \frac{3b^2}{144} + \frac{\sqrt{4a^2 - b^2} \cdot \sqrt{3}b}{24}$$

$$= \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}b\sqrt{4a^2 - b^2}}{12} = \boxed{\frac{a^2}{3} + \frac{b\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{12}}$$
$$L_{\text{circuit}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{12}}$$
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$



Por la propiedad del baricentro que divide cada mediana en proporción 2:1 tenemos que:

$$|MX| = \frac{1}{3} |MD| = \frac{1}{3} h = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

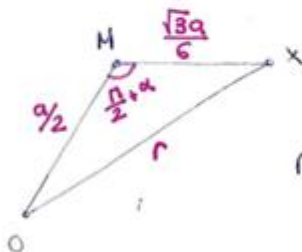
Al tener 2 lados proporcionales y un ángulo común los triángulos

$\triangle ABC$ y $\triangle OBM$ son semejantes $\Rightarrow \triangle ABC \approx \triangle OBM$

Por ello: $\frac{|OM|}{a} = \frac{b/2}{b} \Rightarrow |OM| = \frac{a}{2}$

También, por semejanza: $\widehat{BMO} = \widehat{BCA} = \alpha$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle OMX$



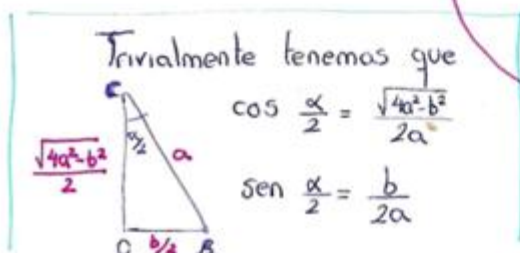
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} + \frac{\sqrt{3}a^2}{6} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{\sqrt{3}a^2}{3} \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$



Trivialmente tenemos que

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2a}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{\sqrt{3}b\sqrt{4a^2 - b^2}}{12} = \frac{a^2}{3} + \frac{b\sqrt{12a^2 - 3b^2}}{12}$$

y, por tanto, $L_{circun} = 2\pi r$

Problema AND 26.3

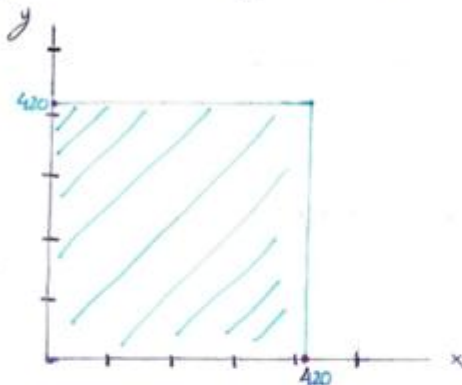
$X \equiv$ tiempo (en min) en el que tiende Amelia

$$X, Y \in [0, 420]$$

$Y \equiv$ tiempo (en min) en el que tiende Ezequiel

Distribución bivariable uniforme.

Espacio muestral (región total)



$$0 \leq x \leq 420$$

$$0 \leq y \leq 420$$

$$A(\text{región total}) = 420^2 = 176400$$

Suceso favorable (región favorable) $\Rightarrow$ Al menos uno de los dos se encuentra el tendedor ocupado

CASO 1 Si tienden antes de las 12:00 (min 120)

Amelia llega 1º y recoge en 45 min $x < 120$; $x < y < x + 45$

Ezequiel llega 1º y recogen en 45 min $y < 120$; $y < x < y + 45$

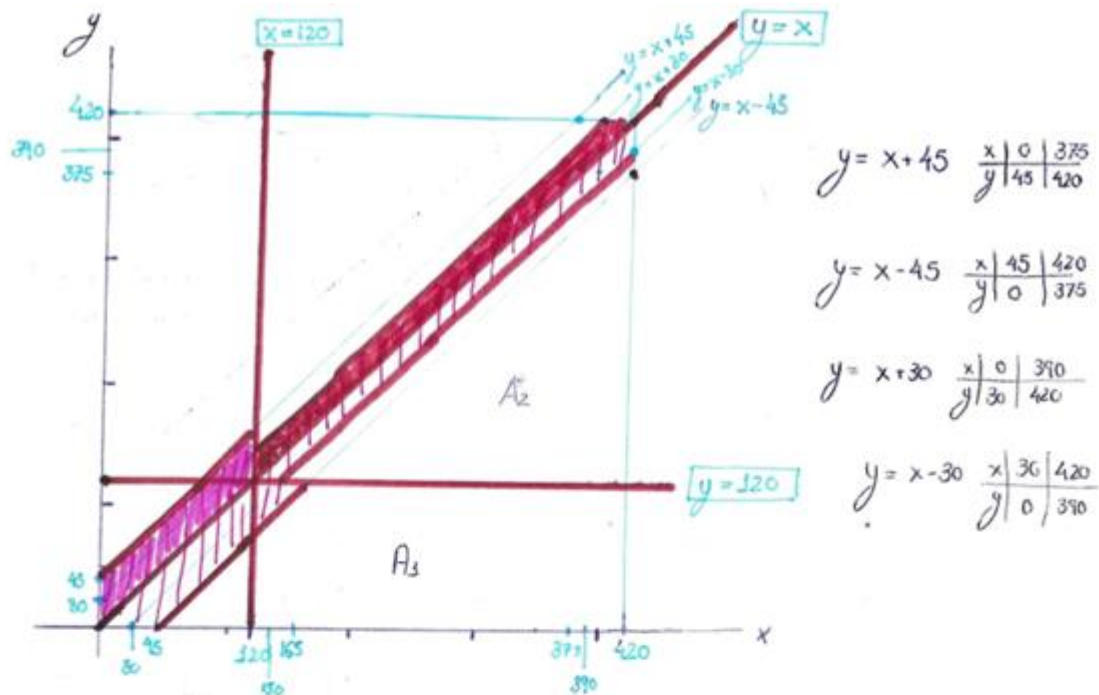
$$y > x - 15$$

CASO 2 Si tienden a partir de las 12:00

Amelia llega 1º y recogen en 30 min $x > 120$ $x < y < x + 30$

Ezequiel llega 1º y recogen en 30 min $y > 120$ $y < x < y + 30$

$$y > x - 30$$



Para calcular el área coloreada hallaremos primero la región no coloreada dividiéndola en:

- Trapecio (A_1) de bases 375 y 255 y altura 120 $\Rightarrow \frac{(375+255) \cdot 120}{2} = 37800$
- Triángulo (A_2) de base 270 y altura 270 $\Rightarrow \frac{270^2}{2} = 36450$

Con ello $A(\text{región favorable}) = 176400 - (2 \cdot 37800 + 2 \cdot 36450)$
 $= 27900$

Por tanto: $P(\text{Se encuentren el tendero ocupado}) = \frac{A(\text{reg total})}{A(\text{reg fav})} = \frac{27900}{176400}$
 $= \frac{31}{196} \approx 0.1582$

Problema AND26.4

$$f(x) = \ln |\ln |x||$$

◦ Dominio

En primer lugar para el primer $\ln$ debemos exigir $|x| \neq 0$

Para el segundo $\ln$ exigimos $|\ln |x|| \neq 0$

$$\ln |x| = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq -1, 1$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{ -1, 0, 1 \}$$

◦ Simetría

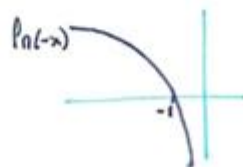
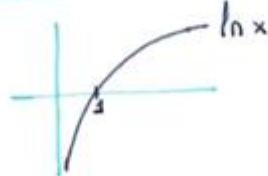
$$f(-x) = \ln |\ln |-x|| = \ln |\ln |x|| = f(x)$$

Función par.
Simetría respecto
al eje de ordenadas

◦ Función a trozos

$$\ln |x| = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como sabemos:



$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$|\ln(-x)| = \begin{cases} -\ln(-x) & -1 < x < 0 \\ \ln(-x) & x \leq -1 \end{cases}$$



Por tanto, $f(x) = \ln |\ln |x||$ queda

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) & \text{si } x > 1 \\ \ln(-\ln x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln(-\ln(-x)) & \text{si } -1 < x < 0 \\ \ln(\ln(-x)) & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Por simetría, podemos limitar el estudio a $x > 0$

o Puntos de corte con los ejes

Eje $y \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ No pertenece al dominio $\Rightarrow$ No corta eje y

Eje $x \Rightarrow y=0 \Rightarrow \ln(\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$
 $\Leftrightarrow x = e > 1 \checkmark$

$(e, 0)$
 $(1/e, 0)$

simetría

$(-e, 0)$
 $(-1/e, 0)$

$\ln(-\ln x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 1$
 $\Leftrightarrow x = 1/e < 1 \checkmark$

o Asíntotas

(AH): $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$ No hay AH

(AV): $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln |\ln |x|| = \infty$ AV en $x=1$

simetría $\rightarrow$ AV en $x=-1$

Posición relativa respecto a dicha asíntota

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(\ln x) = \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(-\ln x) = \ln(0^+) = -\infty$$

Otra posible AV sería $x = 0$

$$AV: \lim_{x \rightarrow 0} \ln|\ln x| = \infty \quad \boxed{AV \text{ en } x=0}$$

Posición relativa respecto a esta asíntota

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-\ln(-x)) = +\infty$$

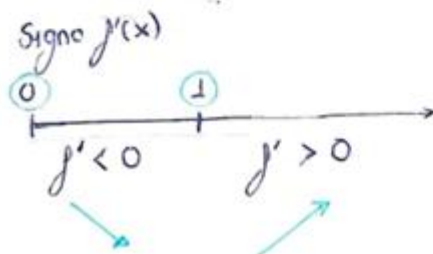
Por último;

$$\textcircled{AO} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{IND}{=} 0 \quad \boxed{\text{No hay AO}}$$

- Continuidad Es continua en su dominio por ser composición de funciones continuas

◦ Monotonía $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln x} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{x \ln x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln x} \quad \text{si } x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x \ln x} = 0$
SIN SOLUCIÓN



simetría

Creciente $(-1, 0), (1, +\infty)$

Decreciente $(-\infty, -1), (0, 1)$

simetría

No hay extremos relativos

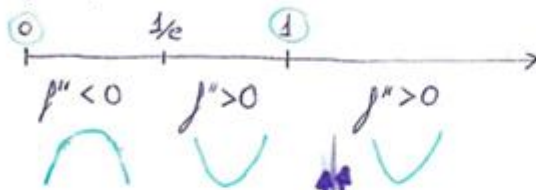


o Curvatura

$$f''(x) = - \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^+ - \{0, 1, 1/e\}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 1/e$$

Signo $f''(x)$



cóncava: $(-\infty, -1), (-1, -1/e), (1/e, 1), (1, +\infty)$

convexa: $(-1/e, 0), (0, 1/e)$

Pto inflexión $(1/e, 0)$
 $(-1/e, 0)$

