



TEMA 36. Proporciones notables. La razón áurea. Aplicaciones

Índice

1. Introducción
 - 1.1. Justificación e importancia del tema
 - 1.2. Aplicación en el aula.
2. Razones y proporciones entre segmentos
3. Teorema de Thales. Proporciones notables
 - 3.1. Tipos de proporciones
 - 3.2. Proporciones notables entre segmentos
4. La razón áurea
 - 4.1. Propiedades geométricas
 - 4.2. Construcciones geométricas
 - 4.3. La sucesión de Fibonacci
 - 4.4. Presencia de la razón áurea
5. Valoración o juicio crítico de los contenidos
6. Conclusión
7. Bibliografía

1. Introducción

A modo de introducción, diré que uno de los principales defectos que se le han atribuido a las matemáticas es la falta de conexión con el mundo, la realidad cotidiana y la naturaleza en general. Pero en este tema de proporciones notables, y más especialmente la razón áurea, es donde más se ve la relación entre las matemáticas y otras disciplinas.

El concepto de proporcionalidad es uno de los más intuitivos de las matemáticas, y la presencia de magnitudes proporcionales es frecuente en la vida cotidiana: relación gasto/compra, relación velocidad/espacio, proporcionalidad entre las dimensiones de un microbio y su imagen al microscopio, proporción entre las distancias medidas en un plano y la realidad que representan.

Puede ser por ello que la teoría de las proporciones sea una de las más antiguas de las teorías de las matemáticas. Así, el libro V de «Los Elementos» de Euclides (siglo III a.C.) está dedicado íntegramente a la teoría de las proporciones, aunque la primera de las aplicaciones se debe a Thales de Mileto, al que se le atribuye ser el padre de la proporcionalidad. Se cuenta que calculó la altura de la gran pirámide a partir de la proporcionalidad entre el triángulo formado por dicha altura y su sombra, y el triángulo formado por una vara vertical y su sombra. Además, en la «Teoría de las proporciones» de Euclides ya



se recogen las definiciones de razón y proporción análogas a las que daremos. Se piensa que las mismas se basaban en los trabajos de Eudoxio que, a su vez, era discípulo de Platón:

- «Razón es la relación cuantitativa en lo que se refiere a la dimensión entre dos magnitudes homogéneas».
- «Proporción es la igualdad de razones».

1.1. Justificación e importancia del tema

Considero que este tema es fundamental, lo que justifica su inclusión en el currículo de matemáticas, tanto a nivel estatal bajo el marco de la LOE, LOMLOE, RD 217/2022, como a nivel autonómico en Andalucía bajo la LEA, DECRETO 102/2023, y ORDEN DE 30 DE MAYO DE 2023, donde el alumnado será capaz de entender, llevándolos a alcanzar las competencias específicas y los descriptores del perfil de salida, superando una serie de criterios de evaluación que medirán una serie de saberes básicos.

Para el desarrollo del tema ha servido de apoyo una bibliografía fidedigna, la cuál se presentará al final.

1.2. Aplicación en el aula

Para impartir este tema se pueden realizar distintas estrategias metodológicas, como por ejemplo..... Se podrán realizar varios tipos de actividades, como.....

2. Razones y proporciones entre segmentos

La medida de un segmento a con otro u tomado como unidad es un número real no negativo, que llamaremos razón entre los segmentos a y u , y que escribimos $a : u$ o a/u .

Dados dos segmentos a y b , b no nulo, llamamos razón $a : b$ o a/b al cociente de sus medidas respecto de una misma unidad u ; la razón es, por tanto, un número real no negativo.

Llamamos proporción a la igualdad entre razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \dots$$

Se dirá que los segmentos $a, a', a'' \dots$ (llamados antecedentes) son directamente proporcionales a los segmentos $b, b', b'' \dots$ (llamados consecuentes).

Observación. La razón entre dos segmentos a y b , b no nulo, es independiente del segmento unidad u elegido.

Demostración. En efecto, si u y u' son dos segmentos unidad:

$$a = \alpha \cdot u, \quad a = \alpha' \cdot u' \quad (\text{con } \alpha \text{ y } \alpha' \text{ reales no negativos})$$

$$b = \beta \cdot u, \quad b = \beta' \cdot u' \quad (\text{con } \beta \text{ y } \beta' \text{ reales positivos})$$

$$u' = \lambda u \quad (\text{con } \lambda \text{ real positivo})$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha' \lambda \text{ y } \beta = \beta' \lambda, \quad \text{de donde } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$$



Por ello podemos reducir a proporciones numéricas las proporciones entre segmentos, y aplicar a éstas las denominaciones y propiedades de aquellas.

1. Si dos proporciones tienen iguales tres términos que ocupan los mismos lugares, los cuartos también son iguales.

$$a : b = a' : b' , \quad a : b = a' : b'' \Rightarrow b'' = b'$$

2. De toda proporción se deduce otra invirtiendo las razones.

$$a : b = a' : b' \Rightarrow b : a = b' : a'$$

3. De toda proporción se deduce otra sustituyendo cada antecedente (consecuente) por su suma o diferencia con el consecuente (antecedente) de la misma razón.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{a' \pm b'}{b'} , \quad \frac{a + b}{a - b} = \frac{a' + b'}{a' - b'}$$

4. En una proporción entre cuatro segmentos se pueden permutar los medios y los extremos.

$$a : b = a' : b' \Rightarrow a : a' = b : b'$$

5. En una proporción entre cuatro segmentos, la suma o diferencia de antecedentes es a la de consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a \pm a'}{b \pm b'} = \frac{a}{b}$$

6. Siendo a, b, a', b' cuatro segmentos y $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ respectivamente sus medidas respecto de una unidad u , se verifica:

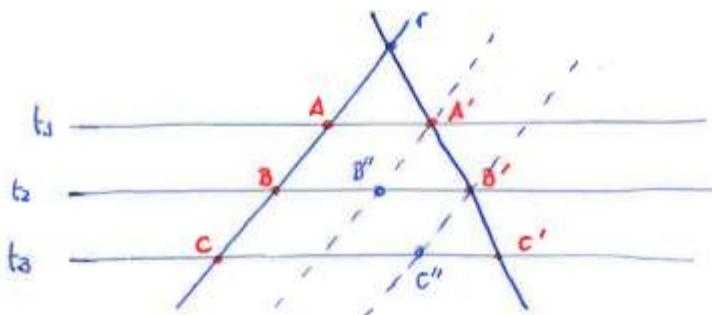
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta' = \alpha' \cdot \beta$$

3. Teorema de Thales. Proporciones notables

Lema. Dadas dos rectas no paralelas r y s del plano, y tres paralelas t_1, t_2 y t_3 que determinan, respectivamente, tres puntos $A < B < C$ sobre r y otros tres puntos $A' < B' < C'$ sobre s tales que: $AB = BC$, entonces $A'B' = B'C'$.

Nota: $A < B < C$ significa que B está en r entre A y C .

Demostración. La paralela a r por A' determina un punto B'' en t_2 . La paralela a r por B' determina un punto C'' en t_3 .



Como $AA'B''B$ forman un paralelogramo $\Rightarrow AB = A'B''$. Por análogo motivo $BC = B'C''$. Como $AB = BC \Rightarrow A'B'' = B'C''$.

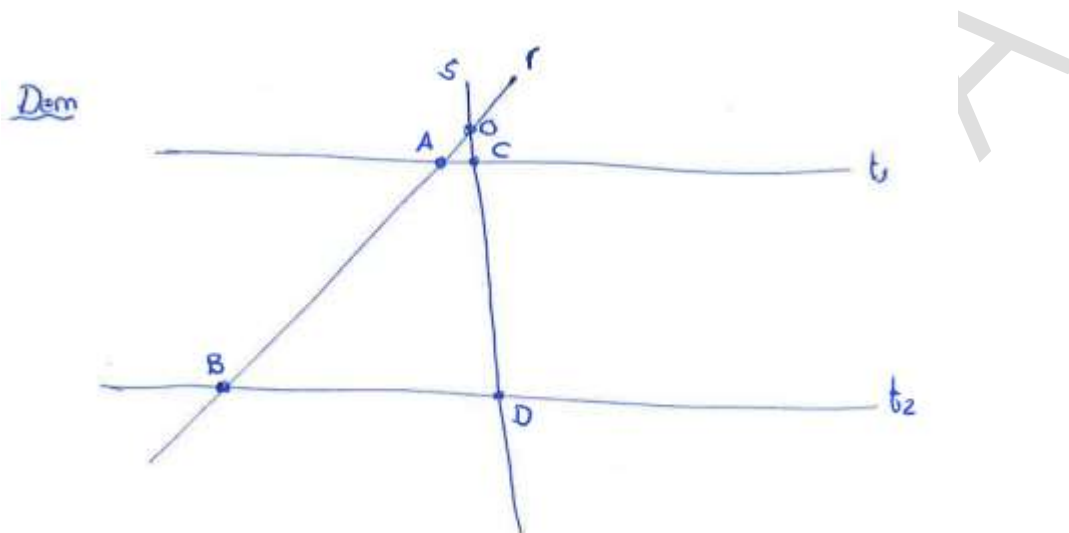


Por estar formado por segmentos paralelos entre sí, el triángulo $A'B'B''$ tiene los mismos ángulos que $B'C'C''$, y como tienen un lado común ($A'B'' = B'C''$), ambos triángulos son congruentes. De donde $A'B' = B'C'$.

Teorema de Thales

Sean dos rectas r, s del plano secantes en un punto O . Sean t_1 y t_2 dos rectas paralelas que cortan, respectivamente, a r en los puntos A y B , y a s en los puntos C y D :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$



Demostración. Sea, por ejemplo, la ordenación $O < A < B$. Sean $x = \frac{OA}{OB}$, $y = \frac{OC}{OD}$.

· Supongamos que $x \in \mathbb{Q}$, es decir, $\frac{OA}{OB} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. De donde existe un segmento k tal que $\frac{OA}{m} = \frac{OB}{n} = k$.

Sea $A_0 = O$ y, dado A_i , sea A_{i+1} el único punto de r con $O < A_i < A_{i+1}$ y $A_i \cdot A_{i+1} = k$ con $i = 0, 1, \dots, n-1$. En otras palabras, estamos construyendo segmentos congruentes con k (disjuntos) desde O hasta B . De este modo $A = A_m$ y $B = A_n$, y A_{i+1} es el punto medio entre A_i y A_{i+2} .

Llamando c_i al punto de s que pertenece a una paralela a t_1 que pase por A_i , se tiene, por el lema anterior, que c_{i+1} es el punto medio de c_i y c_{i+2} .

Por lo tanto, siendo $h = c_0c_1 = c_1c_2 = \dots = c_{n-1}c_n$, se tiene:

$$y = \frac{OC}{OD} = \frac{c_0c_1 + c_1c_2 + \dots + c_{m-1}c_m}{c_0c_1 + \dots + c_{n-1}c_n} = \frac{m \cdot h}{n \cdot h} = \frac{m}{n} = x$$

· Ahora, si x no es racional, entonces $x \in \mathbb{R}^+$. Supongamos $y > x$; por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q} / x < q < y$.

Sea E el punto de r situado en la misma semirrecta que B respecto de O tal que $OE = q \cdot OB$, y sea F el punto de la recta s que pertenece a la paralela a t_1 que contiene a E . Como $q > \frac{OA}{OB}$, $OE = q \cdot OB > OA \Rightarrow A$ está entre O y E .



Aplicando el Axioma de Pasch al triángulo OAC y a la recta EF, nos lleva a que, si F estuviera entre O y C, dicha recta cortaría a t_1 en contradicción con que son paralelas. Se concluye que $OF > OC$. Tenemos, pues, que:

$$OF > OC = y \cdot OD \Rightarrow y < \frac{OF}{OD}$$

y además: $\frac{OE}{OB} = q \Rightarrow \frac{OF}{OD} = q < y$, de lo demostrado cuando la razón es racional, que contradice a lo primero. Se deduce que ha de ser $y \leq x$.

Análogamente se demuestra que $y \geq x$, con lo que $y = x$, es decir, $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$.

3.1. Tipos de proporciones

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, d se denomina cuarta proporcional de a, b y c.

A la proporción $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ se la denomina proporción continua, y en ella los medios vienen dados por la misma cantidad b, que se denomina media proporcional o geométrica de a y c: $b^2 = a \cdot c$.

En una proporción continua, a cualquiera de los extremos se les denomina tercera proporcional. Es decir, c es tercera proporcional de a y b.

Si concretamos nuestras definiciones haciendo referencia a la proporcionalidad entre segmentos, el teorema de Thales nos permite obtener geoméricamente la cuarta proporcional o la tercera proporcional a otros segmentos.

3.2. Proporciones notables entre segmentos

Una proporción se denomina conmensurable o racional cuando las razones que relaciona tienen una constante de proporcionalidad racional, $k \in \mathbb{Q}$. Una proporción se denomina inconmensurable cuando las razones que relaciona tienen una constante de proporcionalidad irracional, $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

En el siglo V a.C. muchos filósofos griegos estudiaron la que denominaron paradoja de los irracionales; por ejemplo, Zenón de Elea. La presunta paradoja era que ellos consideraban que cualquier cantidad mensurable podría asociarse a una medida que fuese un número entero positivo o, a lo sumo, fracción.

Sin embargo, la diagonal del cuadrado es inconmensurable respecto de su lado; esto es, la proporción que forman, llamémosla $\sqrt{2}$, no es racional. Veámoslo con razonamientos contemporáneos.

Supongamos $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

$$\Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ es par} \Leftrightarrow p \text{ par}$$

Por ser p par, $p = 2k$ con k natural.

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ par} \Leftrightarrow q \text{ par}$$

Luego $\frac{p}{q}$ no es irreducible, contradiciendo la hipótesis. En definitiva, $\sqrt{2}$ es irracional.

El valor de esta proporción abrió la puerta al concepto de número irracional. A Teodoro, de la escuela platónica, se le atribuyen las demostraciones, todas desde una perspectiva geométrica, pues era la única considerada correcta en la época, de que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... (entendidas como proporciones entre diagonales



de determinados rectángulos y su lado menor) son inconmensurables respecto de dicho lado menor y, en lenguaje actual, son irracionales como números.

Lambert demostró en 1737 que π era irracional. Sin embargo, $\sqrt{2}$ también es irracional y es trivialmente constructible con regla y compás a partir de un cuadrado de lado unidad. La existencia de números irracionales como π o $\sqrt{2}$, de características aparentemente diferentes, llevó a Euler y a otros matemáticos en el siglo XVIII a distinguir entre números algebraicos y trascendentes. Se entiende como números algebraicos a aquellas raíces de ecuaciones del tipo:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{con } n \text{ natural y } a_i \text{ entero.}$$

Todo número no algebraico es trascendente. $\sqrt{2}$ es algebraico, y Legendre conjeturó que π era trascendente, pero fue el alemán Lindemann, en 1882, quien lo demostró. Todas las construcciones en que intervienen regla y compás son equivalentes a ecuaciones algebraicas de 1.º y 2.º grado, o combinaciones de ellas.

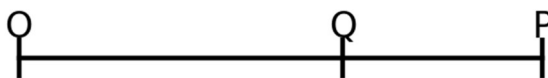
En la siguiente tabla recogemos algunas de las proporciones más destacadas:

PROPORCIONES NOTABLES			
CONMENSURABLES		INCONMENSURABLES	
Cuadrada	$a/b = 1$	Raíz de dos	$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$
Dupla	$a/b = 2$	Raíz de tres	$\frac{a}{b} = \sqrt{3}$
Sesquitercia	$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	Plata	$\frac{a}{b} = 1 + \sqrt{2}$
Sesquiáltera	$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	Áurea	$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
Pentatercia	$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$	Cordobesa	$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}}$

4. La razón áurea

Se dice que un punto Q divide a un segmento OP según la sección áurea cuando se verifica que OQ es media proporcional de OP y PQ:

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{PQ}$$



OQ se denomina segmento áureo del segmento OP. Se denomina razón áurea a cada uno de los dos términos de la proporción (proporción áurea). La constante de proporcionalidad que define esta proporción se denomina número áureo. Para calcularlo:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{siendo } a = b + c \Rightarrow \frac{b + c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow 1 + \frac{c}{b} = \frac{b}{c}$$



$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{la negativa no tiene sentido})$$

4.1. Propiedades geométricas

Exponemos a continuación algunas de las muchas propiedades geométricas donde aparece la razón áurea.

Teorema.

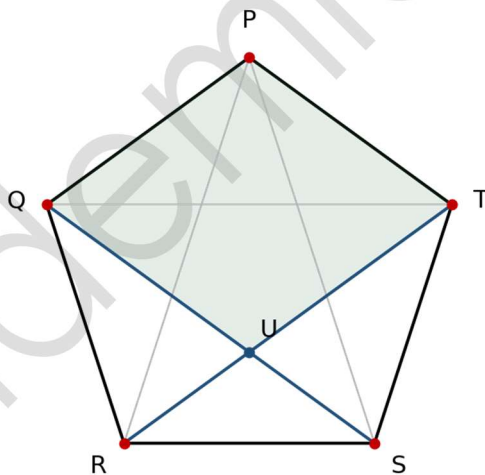
Dos diagonales de un pentágono regular que se cortan lo hacen según la sección áurea. El segmento áureo determinado por dicha sección es congruente con el lado del pentágono.

Demostración. Sea un pentágono regular de vértices P, Q, R, S y T. Las diagonales QS y RT se cortan en U. Los triángulos TQU y RSU son semejantes, pues:

- $\angle SQT = \angle SRT$, por ser ángulos interiores de la circunferencia circunscrita al pentágono abarcando la misma cuerda;
- $\angle QTR = \angle QSR$, por la misma razón.

Se deduce:

$$\frac{QT}{RS} = \frac{QU}{US} \quad (1)$$



Pentágono regular: las diagonales QS y RT se cortan en U según la sección áurea; PQUT es un rombo.

Los puntos P, Q, U y T forman un rombo, pues:

$\Rightarrow$ PQ y TU son paralelas, debido a que $\angle PQT = \angle QTR$ por ser ángulos interiores de la circunferencia circunscrita al pentágono abarcando cuerdas congruentes (PT y QR).

$\Rightarrow$ Análogamente, PT y QU también son paralelas.

$\Rightarrow$ PQ y PT son congruentes.

Por tanto: $QU = PT = RS$ (2)

Además, $QT = QS$, por ser $\angle QST = \angle QTS$, ya que ambos son ángulos interiores que abarcan arcos iguales. Llevando esto y (2) a (1):



$$\frac{QS}{QU} = \frac{QU}{US}$$

Consecuencia. De (1), $\frac{QT}{RS} = \varphi$; es decir, la razón de la diagonal al lado es φ .

Teorema.

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \varphi$$

Nota. Llamamos rectángulo áureo a todo rectángulo para el que la razón entre sus lados es la áurea.

Teorema.

El área del rectángulo áureo más el área del cuadrado cuyo lado es el lado menor del rectángulo áureo es igual al área del cuadrado cuyo lado es el lado mayor.

Teorema.

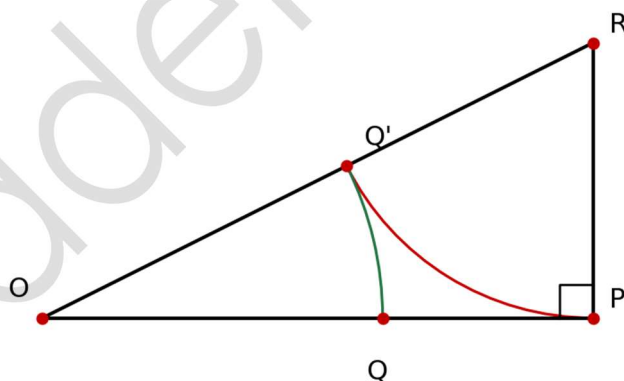
Si colocamos adyacentes dos rectángulos congruentes, uno de ellos girado $\frac{\pi}{2}$ respecto al otro, el rectángulo áureo es el único en el que están alineados tres vértices, siendo dos de ellos pertenecientes a la diagonal de un rectángulo.

4.2. Construcciones geométricas

4.2.1. Construcción del segmento áureo

Para obtener el punto Q que divide al segmento OP según la sección áurea se puede proceder:

- Sea R un punto perpendicular a OP por P tal que $PR = \frac{1}{2} OP$. Si trazamos con centro en R la circunferencia de radio PR, incide en OR en un punto Q'.



Construcción del segmento áureo OQ del segmento OP.

- Con centro en O trazamos la circunferencia de radio Q'O, que incide en OP en Q, que determina la sección áurea sobre OP, pues:

$$OP = x, \text{ por el Teorema de Pitágoras: } OQ = OR - RQ' = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} - \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot x$$

$$\text{de donde } \frac{OP}{OQ} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

- Asimismo, puede comprobarse que podemos obtener el segmento total dado su segmento áureo de la siguiente manera:



- Para obtener el punto P tal que OQ, con $Q \in OP$, sea el segmento áureo de OP, hacemos M el punto medio de OQ y P' el punto de la perpendicular a OQ por Q tal que $P'Q = OQ$.
- Con centro en M trazamos la circunferencia de radio MP', que incide en la prolongación del segmento OQ en P. OP es el segmento cuyo segmento áureo es OQ.

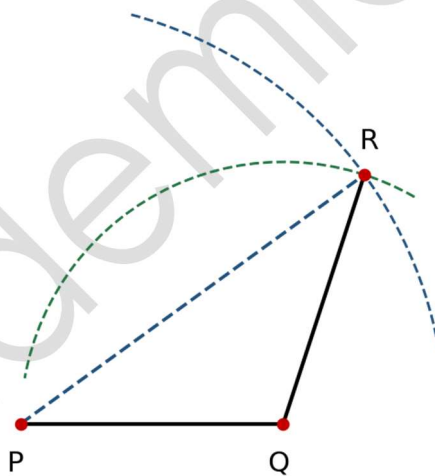
$$\begin{aligned} \text{Llamando } OQ = x \Rightarrow (\text{Pitágoras}) \quad OP &= \frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot x \Rightarrow \frac{OP}{OQ} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

4.2.2. Aplicación a la construcción del pentágono regular dado un lado

A partir del teorema anterior y de la anterior construcción, es inmediato construir un pentágono regular dado un lado PQ.

Desde P construimos el segmento PR' del que PQ es segmento áureo. PR' es congruente con la diagonal del pentágono, por lo que la circunferencia de centro P y radio PR' contendrá el otro extremo de una diagonal PR.

Con centro en Q y radio PQ tenemos una circunferencia que debe contener el extremo R del lado QR del pentágono.

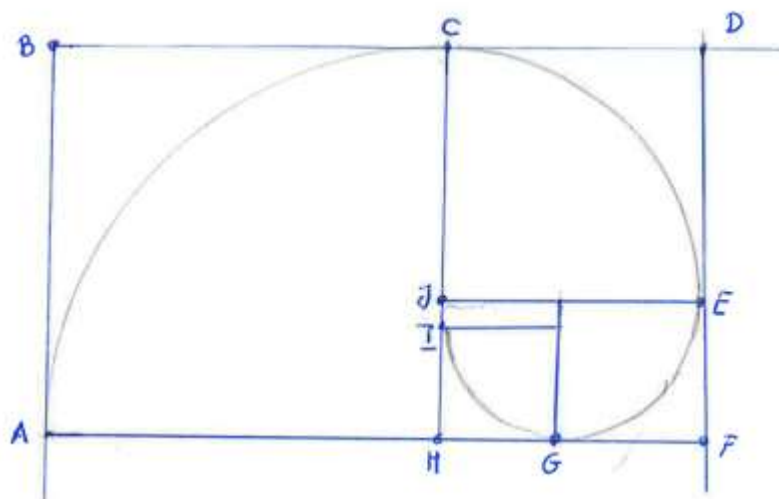


Construcción del vértice R a partir del lado PQ.

El punto de corte de estas circunferencias es el vértice R buscado. Repitiendo este procedimiento conseguimos los otros tres lados que faltarían.



4.2.3. Espiral áurea



Rectángulo áureo, sus subdivisiones sucesivas y la espiral áurea.

El rectángulo áureo ABDF se puede descomponer en dos figuras cuya área total es equivalente a la de éste: el cuadrado ABCH y un rectángulo áureo menor CDFH, como puede comprobarse fácilmente.

Este rectángulo CDFH podemos dividirlo análogamente en un cuadrado y un rectángulo áureo aún menor, y continuar el procedimiento indefinidamente.

Si vamos uniendo, sucesivamente, un par de vértices opuestos de cada cuadrado, empezando por un vértice al que haya llegado otro arco, con un cuadrante de circunferencia de radio igual al lado de dicho cuadrado, construimos la denominada espiral áurea.

4.3. La sucesión de Fibonacci

En 1202, Leonardo de Pisa, apodado Fibonacci, se encontró con su célebre sucesión de enteros a_n en relación con la cría de conejos. Supuso que los conejos vivían para siempre y que cada mes una pareja procrea una nueva pareja, que se vuelve productiva a la edad de dos meses. Sea a_n el número de parejas de conejos en el n -ésimo mes; fue Kepler el que dio forma algebraica a lo que Fibonacci advirtió, esto es, la forma recurrente del término general:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (1)$$

Kepler también observó que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tiende al número áureo ϕ cuando n va aumentando.

Demostración. Puesto que $\phi^2 = \phi + 1$, y siendo la recurrencia $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ con $a_0 = 0$; $a_1 = 1$, su ecuación característica $r^2 - r - 1 = 0$ tiene por soluciones ϕ y $(-\phi)^{-1}$, por lo que el término general de la sucesión viene dado por:

$$a_n = C_1 \phi^n + C_2 (-\phi)^{-n} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se obtiene:

$$C_1 = \frac{1}{\phi + \phi^{-1}}, \quad C_2 = -C_1 \Rightarrow a_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\phi + \phi^{-1}}$$

Vemos que el término general de la sucesión de Fibonacci está íntimamente relacionado con el número áureo, y:

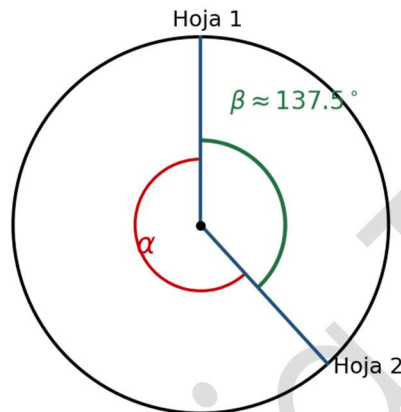


$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi$$

4.4. Presencia de la razón áurea

La filotaxia, es decir, la disposición de las hojas en las plantas, es tal en la Naturaleza que permite que todas consigan estar expuestas a la mayor cantidad posible de radiación total.

Experimentalmente, se comprueba que, en la mayoría de las plantas y los árboles, el ángulo de giro a lo largo del tallo de una hoja a la siguiente es algo mayor de 137° . Veamos cómo aparece el ángulo antes indicado.



División de los 360° según la razón áurea: el ángulo ideal $\beta \approx 137,5^\circ$.

Si dividimos la amplitud de 360° según la razón áurea: $360^\circ = \alpha + \beta$

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \alpha = \varphi\beta$$

$$\Rightarrow 360 = \beta \cdot (\varphi + 1) \Rightarrow \beta = \frac{360}{\varphi + 1} \approx 137,5^\circ$$

Este ángulo se denomina ángulo ideal.

La razón áurea aparece en filotaxia muchas otras veces: la disposición de las escamas de un cono de pino, la disposición de los flósculos del girasol... En general, aparece la proporción áurea con gran frecuencia en la naturaleza: el cuerpo de los insectos, la espiral áurea en conchas e incluso en el cuerpo humano. En las manos aparece el número áureo al obtener la razón de la primera falange a la segunda. En un cuerpo humano desarrollado normalmente, la relación entre la parte superior (del cuerpo al ombligo) y la parte inferior cumple la proporción áurea. Leonardo Da Vinci lo sabía y lo empleaba en sus obras (Hombre de Vitruvio). También ha sido muy utilizada en la obra de muchos arquitectos.

5. Valoración o juicio crítico de los contenidos

Recomendamos hacer un punto bajo este título y decir que:

Los contenidos expuestos en el tema cumplen todos los siguientes requisitos:

1. Son adecuados.
2. Están argumentados normativamente.
3. Existe una valoración por parte del opositor/a de la importancia de los contenidos del tema.



6. Conclusión

En primer lugar, hemos introducido los conceptos de razón y proporción, para luego comentar las propiedades elementales de una proporción. Después de demostrar el resultado más importante de la proporcionalidad de segmentos, el Teorema de Thales, abordamos las proporciones notables, aquéllas que han tenido una importante significación en la Historia de las Matemáticas, como $\sqrt{2}$, que relaciona la diagonal de un cuadrado con su lado.

Pero la parte más importante de este tema es la que se refiere a la razón áurea, que está presente en un gran número de situaciones científicas y de la naturaleza; entre estas últimas destacamos la sucesión de Fibonacci, que está relacionada con la cría de conejos. Además, se han estudiado con detalle sus propiedades geométricas y diversas aplicaciones a construcciones geométricas.

Currículo: Este tema aparece en todos los cursos de la ESO. Ya en el primer ciclo aparece: «Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad». En cuarto curso: «Semejanza. Figuras semejantes. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes».

7. Bibliografía

Puig Adam, P. “Geometría métrica”. Euler editorial
Clemens. “Geometría”. Euler Pearson
Esteban, M. y otros. “Trigonometría”. Ed. Síntesis.
Hilbert, D. “Fundamentos de geometría”. CSIC.
Costa, F. “Geometría básica”. Ed. Sanz y Torres